Лекция 14
РЯДЫ ДИРИХЛЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Рассмотрим ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, где $\{a_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ — последовательности комплексных чисел. Множество точек абсолютной сходимости данного ряда есть *выпуклое множество*. Покажем это.

Пусть ряд абсолютно сходится в точках z_1 и z_2. Для точек z из отрезка $[z_1, z_2]$ выполнено соотношение

$$z = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2, \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

тогда

$$\left|a_n e^{\lambda_n z}\right| = \left|a_n e^{\lambda_n z_1}\right|^{\alpha} \cdot \left|a_n e^{\lambda_n z_2}\right|^{1-\alpha}.$$

Так как для любых $a > 0$, $b > 0$, $0 \le x \le 1$ справедливо неравенство

$$a^x b^{1-x} < a + b,$$

то

$$\left|a_n e^{\lambda_n z}\right| \le \left|a_n e^{\lambda_n z_1}\right| + \left|a_n e^{\lambda_n z_2}\right|, \tag{14.1}$$

тем самым ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ сходится в любой точке отрезка $[z_1, z_2]$ и, следовательно, множество точек абсолютной сходимости выпукло.

Если множество точек абсолютной сходимости ряда содержит внутренние точки, то множество D этих точек есть область (открытое, связное множество).

Теорема 14.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ сходится равномерно внутри области D.

Доказательство. Напомним, что равномерная сходимость внутри области D есть равномерная сходимость на любом компакте, лежащем внутри области D. Для доказательства теоремы достаточно доказать равномерную сходимость ряда в некоторой окрестности точки $z \in D$ (для каждой точки своя окрестность).

Возьмем произвольную точку $z_0 \in D$, тогда существует треугольник $\Delta \subset D$, $z_0 \in \Delta$. Пусть z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника Δ. В силу неравенства (14.1) для точек z, лежащих на сторонах треугольника, справедлива оценка

$$\left|a_n e^{\lambda_n z}\right| < \sum_{j=1}^{3}\left|a_n e^{\lambda_n z_j}\right|.$$

На основании принципа максимума модуля аналитической функции для точек, лежащих внутри треугольника Δ, справедливо то же самое неравенство. Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n e^{\lambda_n z}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{3}\left|a_n e^{\lambda_n z_j}\right|\right), \quad z \in \Delta,$$

т.е. ряд сходится равномерно в треугольнике Δ и тем самым внутри области D. Теорема доказана. ■

Следствие. В области D сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ есть аналитическая функция.

Рассмотрим случай, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le \ldots, \quad \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{|\lambda_n|} = H < \infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 14.2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ сходится в области D с границей ∂D. Если точка $z_0 \in D$ и $\rho(z_0, \partial D) > H$, то ряд сходится абсолютно в точке z_0.

Доказательство. Возьмем в области D круг с центром в точке z_0: $|z - z_0| \le \rho_0$, $\rho_0 > H$, опишем около него многоугольник так, чтобы многоугольник целиком лежал в области D. Вершины многоугольника обозначим $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Так как справедливо неравенство (14.1), то на сторонах многоугольника имеем оценку

$$\left|a_n e^{\lambda_n z}\right| \le \sum_{j=1}^{m}\left|a_n e^{\lambda_n z_j}\right|.$$

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_m \in D$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m}\left|a_n e^{\lambda_n z_j}\right| \le M \text{ (не зависит от } n \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad \left|a_n e^{\lambda_n z}\right| \le M.$$

Тогда в силу принципа максимума модуля аналитической функции внутри многоугольника и, следовательно, на окружности $|z - z_0| = \rho_0$ имеет место неравенство

$$\left|a_n e^{\lambda_n z}\right| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим $\varphi_n = \arg\lambda_n$ и выберем на окружности $|z - z_0| = \rho_0$ точку z'_n, удовлетворяющую условию $\arg(z'_n - z_0) = -\varphi_n$. Тогда

$$\lambda_n(z'_n - z_0) = |\lambda_n(z'_n - z_0)| = \rho_0|\lambda_n|,$$

отсюда

$$\left|a_n e^{\lambda_n z'_n}\right| = \left|a_n e^{\lambda_n z_0}\right| \cdot \left|e^{\lambda_n (z'_n - z_0)}\right| = \left|a_n e^{\lambda_n z_0}\right| e^{\rho_0|\lambda_n|} \leq M,$$

поэтому

$$\left|a_n e^{\lambda_n z_0}\right| \leq M \cdot e^{-\rho_0|\lambda_n|}.$$

По условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{|\lambda_n|} = H < \infty$, или для любого $\varepsilon > 0$ и всех $n > n_0(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|\lambda_n| > \frac{\ln n}{H + \varepsilon}.$$

Таким образом, на общий член ряда имеем оценку

$$\left|a_n e^{\lambda_n z_0}\right| \leq M \cdot n^{-\frac{\rho_0}{H+\varepsilon}}, \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

По условию $\rho_0 > H$, поэтому при малом $\varepsilon > 0$ величина $\dfrac{\rho_0}{H + \varepsilon} > 1$ и тем самым ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n e^{\lambda_n z_0}\right|$ сходится. Теорема доказана. ■

Следствие 1. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию теоремы и область D совпадает со всей комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ сходится абсолютно на $\mathbb{C}$.

Следствие 2. Если $H = 0$, то область сходимости ряда совпадает с областью абсолютной сходимости, тем самым область сходимости ряда есть выпуклая область.

Задачи

I. Найти множество точек сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} e^{in^2 z}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n} e^{i(n^2+n)z}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{i^n \cdot nz}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot e^{i(n\ln n)z}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{inz}$.

II. Найти области сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2+n^3)(e^{nz}+e^{-inz})$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{in^2 z}-e^{-in^2 z})$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(e^{inz}+e^{-inz})$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-2n}(e^{inz}+e^{z})$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}(e^{nz}+e^{-nz}+e^{inz}+e^{-inz})$.

III. Привести пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, $0<|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\lambda_n|}<\infty$, область сходимости которого не является:

1) плоскостью;
2) полуплоскостью.